TAUBER-KONSTANTEN FÜR VERSCHIEDENE TAUBER-BEDINGUNGEN BEI DEN KREISVERFAHREN DER LIMITIERUNGSTHEORIE

VON
WOLFGANG BIEGERT

ABSTRACT

Till now, we know Tauberian constants for the 'Kreisverfahren' with the conditions $\limsup |n^{\frac{1}{2}}a_n| < \infty$ and $\limsup |n^1 a_n| < \infty$. Now, we obtain constants for the more general condition $\limsup |n^p a_n| < \infty$ with any $p\,(= \infty < p < +\infty)$. These constants are not always 0 or ∞, even if $\frac{1}{2} < p < 1$; therefore the Tauberian condition $\limsup |n^p a_n| < \infty$ is 'appropriate' for $\frac{1}{2} \leqq p \leqq 1$.

1. Man bezeichnet als Kreisverfahren der Limitierungstheorie die Euler-Knopp-Verfahren, das Borel-Verfahren, die S_β-Verfahren und die Taylor-Verfahren(¹). Es sei $V(t)$ eine Transformierte der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ (mit reellen oder komplexen Gliedern) nach einem Kreisverfahren. Die Glieder der Reihe sollen der Tauber-Bedingung

$$\limsup_{n\to\infty} |n^p a_n| < \infty \tag{1.1}$$

mit reellem p genügen; s_m seien die Teilsummen der Reihe. Es soll weiter eine Koppelung zwischen m und t so bestehen, dass mit $t \to \infty$ auch $m \to \infty$ geht(²). Die kleinste (endliche oder unendliche) Konstante A, für die die Beziehung

$$\limsup_{t\to\infty} |V(t) - s_m| \leqq A \cdot \limsup_{n\to\infty} |n^p a_n| \tag{1.2}$$

für alle Reihen $\sum a_\nu$ erfüllt ist, heisst Tauber-Konstante.

Für $p = 1/2$ erhielten Agnew [3], Meir [11], Anjaneyulu [4] und der Verfasser [7] Tauber-Konstanten bei den Kreisverfahren. Durch Spezialisierung und unmittelbare Untersuchungen ergaben sich bei Jakimovski [10], Anjaneyulu [5]

Received May 9, 1966, and in revised form July 22, 1966.

(¹) Diese Bezeichnung wurde von Meyer-König vorgeschlagen [9].

(²) Ist t eine Grösse, die nur über ganzzahlige Werte $\to \infty$ strebt, so wird sie in dieser Abhandlung mit n bezeihnet.

und beim Verfasser [7] auch Tauber-Konstanten bei allen Kreisverfahren, wenn $p=1$ ist.

Beim Borel-Verfahren hat der Verfasser [8] für alle reellen p die Existenz von Tauber-Konstanten untersucht und für $1/2 \leqq p \leqq 1$ Tauber-Konstanten erhalten, die angemessen (appropriate im Sinne von Agnew [2]) sind.

Für $p>1$ muss die Tauber-Konstante für jedes permanente Limitierungsverfahren stets null sein. Da für alle Kreisverfahren ein $O(n^{-1/2})$-Satz gilt, war zu erwarten, dass die Distanz $|V(t)-s_m|$ für die Bedingung (1.1) mit $p<1/2$ beliebig gross werden kann(3).

2. In der vorliegenden Abhandlung wird der folgende Satz bewiesen:

SATZ. *Vorgelegt ist eine Reihe $\sum a_\nu$ mit den Teilsummen s_m, deren Glieder der Tauber-Bedingung*

$$\limsup_{n\to\infty} |n^p a_n| < \infty \qquad (p \text{ reell}) \tag{1.1}$$

genügen. Es sei $V(t)$ die Transformierte dieser Reihe nach einem Kreisverfahren. Geht mit $t\to\infty$ auch $m\to\infty$, dass die Koppelungsbedingung

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\dfrac{\gamma}{D_V}t-m}{\gamma^{1-p}t^p} = \omega \tag{2.1}$$

erfüllt ist, so gilt

$$\limsup_{t\to\infty} |V(t)-s_m| \leqq A_\omega^{(V)} \cdot \limsup_{n\to\infty} |n^p a_n| \tag{2.2}$$

mit

$$A_\omega^{(V)} = D_V^{1-p} \cdot \begin{cases} \infty & \textit{für } -\infty < p < 1/2, \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left\{e^{-\omega^2/2} + |\omega| \displaystyle\int_0^{|\omega|} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz\right\} & \textit{für } p = 1/2, \\ |\omega| & \textit{für } 1/2 < p < 1, \\ \dfrac{\omega}{|\omega|} \log(1+\omega) & \textit{für } p = 1, \\ 0 & \textit{für } 1 < p < \infty. \end{cases} \tag{2.3}$$

Darüber hinaus ist $A_\omega^{(V)}$ die beste Konstante in dem Sinn, dass es mindestens

(3) Bei Verfahren, für die als schärfster O-Satz ein $O(n^{-1})$-Satz gilt, ist zu erwarten —aber wohl bisher nicht unmittelbar untersucht—, dass schon für die Bedingung (1.1) mit $p<1$ die Tauber-Konstante ∞ wird. Also ist vermutlich bei diesen Verfahren nur der Fall $p=1$ angemessen; sonst würde eine endliche Tauber-Konstante für $p<1$ zumindest einen o-Satz liefern, der schärfer ist als die bisher bekannten o-Sätze.

eine Reihe Σa_ν so gibt, dass in (2.2) das Gleichheitszeichen gilt. Dabei sind D_V und γ für das Verfahren charakteristische Grössen, nämlich

$$\gamma = q, \quad D_E = \frac{q}{q+1} \quad \text{beim Euler-Knopp-Verfahren,}$$

$$\gamma = 1, \quad D_B = 1 \quad \text{beim Borel-Verfahren,}$$

$$\gamma = \frac{1}{\beta}, \quad D_S = \frac{1}{1-\beta} \quad \text{beim } S_\beta\text{-Verfahren,}$$

$$\gamma = \alpha, \quad D_T = \frac{\alpha}{1-\alpha} \quad \text{beim Taylor-Verfahren.}$$

Für $p = 1$ muss ω aus $-1 < \omega < +\infty$ gewählt werden(4).

Die Grössen D_V hängen dabei in der gleichen Weise zusammen, wie dies Meyer-König für die Äquivalenz angab, wenn die Reihen der Tauber-Bedingung $s_m = o(\sqrt{m})$ genügen. Insbesondere strebt $D_E \to D_B$ für $q \to \infty$, $D_S \to D_B$ für $\beta \to o$, und es ist $D_T = D_B$ für $\alpha = 1/2$. [12].

3. Der Beweis bezieht sich auf den Satz, den Agnew [1] angab. Wählt man als beschränkte Folge $\{x_n\}$ die Folge $\{n^p a_n\}$ und betrachtet als Transformierte $y(t)$ den Ausdruck $V(t) - s_m$, so ist für die durch

$$y(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu x_\nu \tag{3.1}$$

definierten Funktionen $c_\nu(t)$ bei den Kreisverfahren die Bedingung

$$\lim_{t\to\infty} c_\nu = 0 \qquad \text{für jedes feste } \nu = 1, 2, 3 \cdots \tag{3.2}$$

erfüllt (Siehe [7]). Es ist daher nur die Bedingung

$$\limsup_{t\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu| = A \tag{3.3}$$

zu untersuchen. Dabei ist nach dem Satz von Agnew A die Tauber-Konstante. Aus Platzgründen wird der Beweis für das Euler-Knopp-Verfahren geführt und für S_β-und Taylor-Verfahren nur angedeutet. Der Beweisgang ist analog zu dem beim Euler-Knopp-Verfahren.

---

(4) Für wachsendes p wird die Tauber-Bedingung (1.1) strenger, also muss auch die Tauber-Konstante kleiner (oder zumindest nicht grösser) werden. Mit p verändert sich nicht nur die Tauber-Bedingung, sondern auch die Koppelungsbedingung (2.1). Es ist daher kein Widerspruch, wenn beim Euler-Knopp- und beim Taylor-Verfahren im Bereich $1/2 < p < 1$ die Konstante $D^{1-p}|\omega|$ für festes ω grösser wird, wenn p wächst.

Ausser den Abschätzungen in [8], a) bis e), verwendet man:
Ist $v \geqq 2$ eine ganze Zahl, so gilt

$$(3.4) \qquad v^{-p} = \int_{v-1}^{v} x^{-p} dx - \varepsilon_v = \frac{1}{1-p}[v^{1-p} - (v-1)^{1-p}] - \varepsilon_v \; .$$

Für $p \leqq 0$ ist $\varepsilon_v \leqq 0$. Für $0 < p < 1$ strebt $\varepsilon_v \to 0$ für $v \to \infty$. Weiter ist $0 < \sum_{v=m+1}^{\infty} \varepsilon_v \leqq m^{-p}$, und das strebt $\to 0$ für $m \to \infty$.

4. Die Euler-Knopp-Transformation wird erklärt durch

$$(4.1) \qquad E_q(n) = (q+1)^{-n} \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} q^{n-v} s_v \qquad (0 < q < \infty),$$

und für die dadurch erklärten c_v gilt nach Vertauschung der Summations reihenfolge und Anwendung der Abschätzung b)

$$(4.2) \qquad \sum_{v=1}^{\infty} |c_v| \geqq \frac{1}{1-p} \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} q^{n-v} \left| m^{1-p} - v^{1-p} \right|,$$

falls $p \leqq 0$ ist. Ist $0 < p < 1$, und beachtet man, dass mit der Folge $\{\varepsilon_v\}$ auch die Transformierte dieser Folge $\to 0$ strebt, so erhält man

$$(4.3) \qquad \sum_{v=1}^{\infty} |c_v| = \underset{n\to\infty}{o(1)} + \frac{1}{1-p} \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} q^{n-v} \left| m^{1-p} - v^{1-p} \right|.$$

Aus der Menge der Glieder der Summen in (4.2) und (4.3) soll eine Teilmenge ausgewält werden nach der Vorschrift:

$$v \in \mathfrak{B}_k \text{ bedeute } \left|(q+1)v - n\right| > \delta n^k$$

mit beliebigem, aber festem $\delta > 0$ und mit festem $k > 0$.

Man betrachtet nun der Reihe nach die Fälle $1/2 \leqq p < 1$, $0 < p < 1/2$ und $p \leqq 0$. Es sei zunächst $1/2 \leqq p < 1$. Ist dann ein $v \in \mathfrak{B}_p$, so gilt für dieses v auch $v \in \mathfrak{B}_{1/2}$. Mit der Abschätzung c) kann man dann schreiben

$$(4.4.1) \qquad \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{v \in \mathfrak{B}_p} \binom{n}{v} q^{n-v} \left| m^{1-p} - v^{1-p} \right|$$

$$\leqq \frac{1}{m^p} \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{v \in \mathfrak{B}_p} \binom{n}{v} q^{n-v} |m - v| \leqq \frac{1}{m^p} \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{v \in \mathfrak{B}_{1/2}} \binom{n}{v} q^{n-v} |m - v|,$$

und nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt weiter

$$(4.4.2) \qquad \leqq \frac{1}{m^p} \left\{ \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{v \in \mathfrak{B}_{1/2}} \binom{n}{v} q^{n-v} (m-v)^2 \right\}^{1/2}$$

$$\cdot \left\{ \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{v \in \mathfrak{B}_{1/2}} \binom{n}{v} q^{n-v} \right\}^{1/2} .$$

Mit der Formel (siehe [7], Abschnitt 15)

$$\frac{1}{(q+1)^n}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}q^{n-\nu}(z-\nu)^2=\frac{1}{(q+1)^2}\{[z(q+1)-n]^2+nq\}$$

erhält man für $z(q+1)=n$ wegen $\nu\in\mathfrak{B}_{1/2}$

$$\frac{1}{(q+1)^n}\sum_{\nu\in\mathfrak{B}_{1/2}}\binom{n}{\nu}q^{n-\nu}<\frac{q}{\delta^2}.$$

Lässt man mit $n\to\infty$ auch $m\to\infty$ streben, so dass die Vorschrift

$$\frac{(q+1)m-n}{n^p}=Q(n)\text{ mit }\limsup_{n\to\infty}Q(n)=Q\gtreqless 0\qquad\text{gilt,}\tag{4.5}$$

so kann man für $z=m$ und genügend grosses n auch

$$\frac{1}{(q+1)^n}\sum_{\nu\in\mathfrak{B}_{1/2}}\binom{n}{\nu}q^{n-\nu}(m-\nu)^2<\frac{1}{(q+1)^2}\,Q^2n^{2p}\quad\text{schreiben.}$$

Wegen (4.5) strebt für $p<1$ der Bruch $(n/m)\to q+1$ für $n\to\infty$. Also kann man zu einem vorgegebenen $\varepsilon>0$ ein genügend grosses $\delta>0$ so wählen, dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{(q+1)^n}&\sum_{\nu\in\mathfrak{B}_p}\binom{n}{\nu}q^{n-\nu}\left|m^{1-p}-\nu^{1-p}\right|\\&\leqq\frac{1}{m^p}\frac{1}{(q+1)^n}\sum_{\nu\in\mathfrak{B}_p}\binom{n}{\nu}q^{n-\nu}\left|m-\nu\right|<\varepsilon\end{aligned}\tag{4.6.1}$$

wird. Für $\nu\notin\mathfrak{B}_p$ strebt $(\nu/n)\to(q+1)^{-1}$, also gilt hier die Abschätzung e). Aus (4.3) erhält man mit (4.6.1) für $1/2\leqq p<1$

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{\infty}|c_\nu|\cong\frac{1}{n^p}\left(\frac{n}{m}\right)^p&\frac{1}{(q+1)^n}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}q^{n-\nu}|m-\nu|\\&-\frac{1}{m^p}\frac{1}{(q+1)^n}\sum_{\nu\in\mathfrak{B}_p}\binom{n}{\nu}q^{n-\nu}|m-\nu|,\end{aligned}$$

wobei die letzte Summe wieder $<\varepsilon$ zu machen ist. Für $1/2\leqq p<1$ gilt also

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|c_\nu|=o(1)+\frac{(q+1)^p}{n^p}\frac{1}{(q+1)^n}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}q^{n-\nu}|m-\nu|=o(1)+\Phi(n).\tag{4.6.2}$$

Es sei nun $0<p<1/2$. Ist $\nu\notin\mathfrak{B}_{1-p}$, so strebt wiederum $\nu/m\to 1$ für $n\to\infty$. Die Glieder für $\nu\in\mathfrak{B}_{1-p}$ sind alle $\geqq 0$, also folgt aus (4.3)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|c_\nu|\geqq o(1)+\frac{1}{m^p}\frac{1}{(q+1)^n}\sum_{\nu\notin\mathfrak{B}_{1-p}}\binom{n}{\nu}q^{n-\nu}|m-\nu|.\tag{4.7.1}$$

Nach der Cauchy-Schwarzschen Abschätzung gilt wie vorn für grosse n

$$\frac{1}{m^p} \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{\nu \in \mathfrak{B}_{1-p}} \binom{n}{\nu} q^{n-\nu} \left| m - \nu \right| < \left(\frac{n}{m}\right)^p \frac{q}{q+1} \frac{1}{\delta}.$$

Damit kann man für genügend grosses $\delta > 0$ diese Summe unter ε drücken; man darf also diese Summe bei (4.7.1) addieren. Für $0 < p < 1/2$ gilt daher

$$\text{(4.7.2)} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| c_\nu \right| \geqq o(1) + \frac{1}{m^p} \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} q^{n-\nu} \left| m - \nu \right| = o(1) + \Phi(n).$$

Ist schliesslich $p \leqq 0$, so erhält man aus (4.2) unmittelbar

$$\text{(4.7.3)} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| c_\nu \right| \geqq \frac{1}{1-p} \frac{1}{m^p} \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} q^{n-\nu} \left| m - \nu \right| = \frac{1}{1-p} \cdot \Phi(n).$$

Damit ist der Wert der Summe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| c_\nu \right|$ für alle $-\infty < p < 1$ nur abhängig von $\Phi(n)$. Wegen (4.5) ist $m < n$ für genügend grosse n. Damit kann man

$$\Phi(n) = \frac{(q+1)^p}{n^p} (S_1 + S_2)$$

schreiben mit

$$S_1 = \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{\nu=0}^{m} \binom{n}{\nu} q^{n-\nu} (m - \nu) \text{ und } S_2 = \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{\nu=m} \binom{n}{\nu} q^{n-\nu} (\nu - m).$$

Nach kurzer Zwischenrechnung erhält man

$$\text{(4.8.1)} \qquad \Phi(n) = Z_1 - Z_2 + Z_3$$

mit

$$\text{(4.8.2)} \qquad Z_1 = \frac{(q+1)^p}{n^p} 2m \frac{1}{(q+1)^n} \binom{n-1}{m} q^{n-m},$$

$$\text{(4.8.3)} \qquad Z_2 = \frac{(q+1)^p}{n^p} [(q+1)m - n] \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n-1}{\nu-1} q^{n-\nu},$$

$$\text{(4.8.4)} \qquad Z_3 = \frac{(q+1)^p}{n^p} 2 \cdot [(q+1)m - n] \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{\nu=1}^{m} \binom{n-1}{\nu-1} q^{n-\nu}.$$

Aus (4.5) bekommt man sofort

$$\text{(4.9.1)} \qquad Z_2 \to Q(q+1)^{p-1} \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Für Z_1 erhält man mit (4.5) und mit der Stirlingschen Formel

$$Z_1 \cong \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{q}}{(q+1)^{1-p}} n^{\frac{1}{2}-p} (1 + Qn^{p-1})^{-(n/q+1)-(Q/q+1)n^p} \cdot \left(1 - \frac{Q}{q}\right)^{-(q/q+1)n+(Q/q+1)n^p}$$

Wendet man auf

$$\zeta = \log\left\{(1+Q\cdot n^{p-1})^{-(n/q+1)-(Q/q+1)n^p}\left(1-\frac{Q}{q}n^{p-1}\right)^{-(q/q+1)n+(Q/q+1)n^p}\right\}$$

die L'Hospitalsche Regel an, erhält man für $p<1$ und $p\neq 0$

$$\zeta \cong -\frac{(1-p)^2}{p}\frac{Q^2}{q}n^{2p-1}.$$

Für $p=0$ ergibt sich sofort $\zeta\to 0$ für $n\to\infty$. Für $n\to\infty$ strebt damit

$$\zeta \to \begin{cases} -\infty & \text{für } p>\frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{q} & \text{für } p=\frac{1}{2}, \\ 0 & \text{für } p<\frac{1}{2}, \end{cases}$$

und also

$$(4.9.2) \qquad Z_1 \to \begin{cases} 0 & \text{für } p>\frac{1}{2}, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{q}{q+1}}\, e^{-\frac{1}{2}(Q^2/q)} & \text{für } p=\frac{1}{2}, \\ \infty & \text{für } p<\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Nun ist noch Z_3 zu untersuchen. Es ist

$$Z_3 \cong 2Q(q+1)^{p-1}\left\{\frac{1}{(q+1)^{n-1}}\sum_{\nu=0}^{m-1}\binom{n-1}{\nu}q^{(n-1)-\nu}\right\}.$$

Aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung kennt man im Zusammenhang mit der Binomialverteilung die Beziehung

$$\frac{1}{(q+1)^{n-1}}\sum_{\nu=0}^{m-1}\binom{n-1}{\nu}q^{(n-1)-\nu} = o(1)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\eta} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz$$

mit

$$\eta \cong \frac{Q}{\sqrt{q}}n^{p-\frac{1}{2}}$$

F ür $n\to\infty$ strebt also

$$\eta \to \begin{cases} +\infty & \text{für } p > \frac{1}{2} \text{ und } Q > 0, \\ 0 & \text{für } p > \frac{1}{2} \text{ und } Q = 0, \\ -\infty & \text{für } p > \frac{1}{2} \text{ und } Q < 0, \\ \frac{Q}{\sqrt{q}} & \text{für } p = \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{für } p < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dann gilt

$$(4.9.3) \qquad Z_3 \to \begin{cases} 2Q(q+1)^{p-1} & \text{für } p > \frac{1}{2} \text{ und } Q > 0, \\ 0 & \text{für } p > \frac{1}{2} \text{ und } Q \leqq 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, Q(q+1)^{-1/2} \int_{-\infty}^{Q/(\sqrt{q})} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz & \text{für } p = \frac{1}{2}, \\ Q(q+1)^{p-1} & \text{für } p < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Fasst man zusammen und beachtet im Fall $p = 1/2$ die Umformung

$$\frac{Q}{\sqrt{q+1}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{Q}{\sqrt{q+1}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz,$$

so erhält man

$$\Phi(n) \to \begin{cases} +\infty & \text{für } p < \frac{1}{2}, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{q}{q+1}}\, e^{-(Q^2/2q)} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{|Q|}{\sqrt{q+1}} \int_0^{|Q|/\sqrt{q}} - e^{-\frac{1}{2}z^2} dz & \text{für } p = \frac{1}{2}, \\ \frac{|Q|}{(q+1)^{1-p}} & \text{für } \frac{1}{2} < p < 1. \end{cases}$$

Wird in der Koppelungsbedingung (4.5) die Grösse Q ersetzt durch

$$\omega = Qq^{1-p}$$

und verwendet man die Konstante, die Jakimovski [10], spezialisiert auf das Euler-Knopp-Verfahren, im Falle $p = 1$ erhielt, so gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu| = D_E^{1-p} \cdot \begin{cases} +\infty & \text{für} -\infty < p < \frac{1}{2}, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ e^{-\omega^2/2} + |\omega| \int_0^{|\omega|} e^{-\frac{1}{2}z^2} \, dz \right\} & \text{für } p = \frac{1}{2} \\ |\omega| & \text{für } \frac{1}{2} < p < 1 \\ \frac{\omega}{|\omega|} \log(1+\omega) & \text{für } p = 1 \\ 0 & \text{für } 1 < p < +\infty. \end{cases}$$

Beachtet man noch den Satz von Agnew, so ist damit der Beweis im Falle des Euler-Knopp-Verfahrens vollständig.

Die S_β-Transformation wird erklärt durch

$$S_\beta(n) = (1-\beta)^{n+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \beta^\nu s_\nu, \qquad (0 < \beta < 1) \tag{5.1}$$

und für dadurch definierten c_ν gilt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu| = \left\{ (1-\beta) \sum_{\rho=0}^{n} (1-\beta)^\rho \right\} + \sum_{\nu=2}^{m} \nu^{-p} \beta^\nu \sum_{\rho=n+1}^{\infty} \binom{\nu-1+\rho}{\nu-1} (1-\beta)^\rho$$
$$+ \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \nu^{-p} \beta^\nu \sum_{\rho=0}^{n} \binom{\nu-1+\rho}{\nu-1} (1-\beta)^\rho.$$

Ist $p \leqq 0$, erhält man mit (3.4)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu| \geqq \underset{n\to\infty}{o(1)} + \frac{1}{1-p} \cdot \Psi(n,m); \tag{5.2}$$

dabei bedeutet

$$\Psi(n,m) = \sum_{\nu=2}^{m} [\nu^{1-p} - (\nu-1)^{1-p}] \sum_{\rho=n+1}^{\infty} \binom{\nu-1+\rho}{\nu-1} (1-\beta)^\rho$$
$$+ \sum_{\nu=m+1}^{\infty} [\nu^{1-p} - (\nu-1)^{1-p}] \sum_{\rho=0}^{n} \binom{\nu-1+\rho}{\nu-1} (1-\beta)^\rho.$$

Ist aber $0 < p < 1$, so erhält man mit (3.4)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu| = o(1) + \frac{1}{1-p} \Psi(n,m) - \sum_{\nu=2}^{m} \varepsilon_\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta^{\nu+1} \cdot \sum_{\rho=0}^{n} \binom{\nu+\rho}{\nu} (1-\beta)^\rho \varepsilon_{\nu+1}$$
$$-2 \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \beta^\nu \sum_{\rho=n+1}^{\infty} \binom{\nu-1+\rho}{\nu-1} (1-\beta)^\rho \varepsilon_\nu .$$

Die zweitletzte Summe ist die S_β-Transformation der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_\nu$ (mit $\varepsilon_0=\varepsilon_1=0$). Wegen der Permanenz streben Reihe und Transformierte gegen denselben Wert. Weiter strebt

$$2\sum_{\nu=m+1}^{\infty}\beta^\nu\sum_{\rho=n+1}^{\infty}\binom{\nu-1+\rho}{\nu-1}(1-\beta)^\rho\varepsilon_\nu\leqq 2\sum_{\nu=m+1}^{\infty}\varepsilon_\nu\leqq 2m^{-p}\to 0$$

für $m\to\infty$. Damit gilt für $0<p<1$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|c_\nu|=o(1)+\frac{1}{1-p}\Psi(n,m), \tag{5.3.1}$$

wenn mit $n\to\infty$ auch $m\to\infty$ strebt. Nach einiger Umrechnung ([5]) erhält man

$$\Psi(n,m)=(1-\beta)^{n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\beta^\nu\left|m^{1-p}-\nu^{1-p}\right|. \tag{5.3.2}$$

Man wählt jetzt die Teilmenge $\mathfrak{B}_k$ nach der Vorschrift:

$$\nu\in\mathfrak{B}_k \text{ bedeute } \left|\nu-\frac{\beta}{1-\beta}(n+1)\right|>\delta(n+1)^k \tag{5.3.3}$$

mit beliebigem, aber festem $\delta>0$ und festem $k>0$. Da

$$(1-\beta)^{n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\beta^\nu(z-\nu)^2=\frac{1}{(1-\beta)^2}\{[z(1-\beta)-(n+1)\beta]^2+(n+1)\beta\}$$

gilt ([6]), kann wie beim Euler-Knopp-Verfahren abschätzen. Man erhält

$$\begin{aligned}(1-\beta)^{n+1}&\sum_{\nu\in\mathfrak{B}_p}\binom{n+\nu}{\nu}\beta^\nu\left|m^{1-p}-\nu^{1-p}\right|\\ &\leqq\frac{1}{m^p}(1-\beta)^{n+1}\sum_{\nu\in\mathfrak{B}_p}\binom{n+\nu}{\nu}\beta^\nu|m-\nu|<\varepsilon,\end{aligned} \tag{5.4}$$

wenn man m und n nach der Vorschrift

$$\frac{(1-\beta)m-\beta(n+1)}{(n+1)^p}=Q(n) \text{ mit } \limsup_{n\to\infty}Q(n)=Q\gtreqless 0 \tag{5.5}$$

miteinander koppelt. Mit der Abschätzung e) erhält man dann für $1/2\leqq p<1$

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{\infty}|c_\nu|&=o(1)+\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^p\frac{1}{(n+1)^p}(1-\beta)^{n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\beta^\nu|m-\nu|\\ &=o(1)+\Phi(n).\end{aligned} \tag{5.6}$$

([5]) Siehe z.B. [7]; dort ist die entsprechende Umrechnung für $p=\frac{1}{2}$ durchgeführt.

([6]) Siehe z.B. [7], Abschnitt 22. Wegen dieser Formel ist in (5.3.3) und (5.5) statt n die Form $(n+1)$ gewählt.

Für $0 < p < 1/2$ und $p \leqq 0$ ergibt sich wie beim Euler-Knopp-Verfahren

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu| \geqq o(1) + \Phi(n) \text{ und } \sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu| \geqq o(1) + \frac{1}{1-p} \cdot \Phi(n). \tag{5.7}$$

Man zerlegt

$$\Phi(n) = Z_1 - Z_2 + Z_3$$

mit

$$Z_1 = \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^p \frac{1}{(n+1)^p} 2m \cdot (1-\beta)^{n+1} \binom{m+n+1}{n+1} \beta^m, \tag{5.8.1}$$

$$Z_2 = \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^p \frac{1}{(n+1)^p} [m(1-\beta) - \beta(n+1)](1-\beta)^{n+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu+1}{n+1} \beta^\nu, \tag{5.8.2}$$

$$Z_3 = \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^p \frac{1}{(n+1)^p} 2[m(1-\beta) - \beta(n+1)](1-\beta)^{n+1} \sum_{\nu=0}^{m-1} \binom{n+\nu+1}{n+1} \beta^\nu. \tag{5.8.3}$$

Sofort bekommt man

$$Z_2 \to \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^p \frac{Q}{1-\beta} \qquad \text{für } n \to \infty \tag{5.9.1}$$

und, wiederum nach Anwendung der Stirlingschen Formel,

$$Z_1 \to \begin{cases} 0 & \text{für } p > \frac{1}{2}, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-\beta}} e^{-\frac{1}{2}(Q^2/\beta)} & \text{für } p = \frac{1}{2}, \\ \infty & \text{für } p < \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{5.9.2}$$

Wegen der Formel

$$(1-\beta)^{n+1} \sum_{\nu=0}^{m-1} \binom{n+\nu+1}{n+1} \beta^\nu = o(1) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1-\beta} \int_{-\infty}^{\eta} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

mit

$$\eta \cong \frac{Q}{\sqrt{\beta}} (n+1)^{p-1/2}$$

strebt.

$$
(5.9.3)\quad Z_3 \to \begin{cases} 2\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^p \cdot \frac{Q}{1-\beta}, & \text{wenn } p > \frac{1}{2} \text{ und } Q > 0, \\ 0, & \text{wenn } p > \frac{1}{2} \text{ und } Q \leqq 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{\sqrt{\beta(1-\beta)}}\, Q \cdot \int_{-\infty}^{Q/\sqrt{\beta}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz, & \text{wenn } p = \frac{1}{2}, \\ \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^p \frac{Q}{1-\beta} & \text{wenn } p < \frac{1}{2} \text{ ist.} \end{cases}
$$

Fasst man zusammen und ersetzt die Koppelungsbedingung (5.5) durch

$$
\limsup_{n\to\infty} \frac{(1-\beta)m - \beta n}{\beta^p n^p} = \frac{Q}{\beta^p} = \omega,
$$

so erhält man

$$
\limsup_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu| = D_s^{1-p}. \begin{cases} +\infty & \text{für } -\infty < p < \frac{1}{2}, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{ e^{-(\omega^2/2)} + |\omega| \cdot \int_0^{|\omega|} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz \right\} & \text{für } p = \frac{1}{2}, \\ |\omega| & \text{für } \frac{1}{2} < p < 1, \\ \frac{\omega}{|\omega|} \log(1+\omega) & \text{für } p = 1, \\ 0 & \text{für } 1 < p < +\infty. \end{cases}
$$

Für $p = 1/2$ ergibt sich die Konstante, die Meir [11] und Anjaneyulu [4] schon früher ermittelten, den Wert für $p = 1$ erhielt der Verfasser [7].

Die Taylor-Transformation wird erklärt durch

$$
(6.1)\qquad T_\alpha(n) = (1-\alpha)^{n+1} \sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu}{n} \alpha^{\nu-n} s_\nu \qquad (o < \alpha < 1).
$$

ür die dadurch definierten c_ν gilt, falls $n < m$ ist,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|c_\nu\right| = \sum_{\nu=n+1}^{m} \nu^{-p} - \sum_{\nu=n+1}^{m} \nu^{-p} \sum_{\rho=0}^{n} (1-\alpha)^{\rho} \binom{\nu}{\rho} \alpha^{\nu-\rho}$$

$$+ \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \nu^{-p} \sum_{\rho=0}^{n} (1-\alpha)^{\rho} \binom{\nu}{\rho} \alpha^{\nu-\rho}$$

und für $n \geqq m$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|c_\nu\right| = \sum_{\nu=m+1}^{n} \nu^{-p} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-p} \sum_{\rho=0}^{n} (1-\alpha)^{\rho} \binom{\nu}{\rho} \alpha^{\nu-\rho}.$$

Ist $p \leqq 0$, so kann man mit (3.4) abschätzen und erhält für $n < m$ und $n \geqq m$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|c_\nu\right| \geqq o(1) + \frac{1}{1-p}\Psi(n,m). \tag{6.2}$$

Ist $0 < p < 1$ so bekommt man

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|c_\nu\right| = o(1) + \frac{1}{1-p}\Psi(n,m); \tag{6.3.1}$$

dabei bedeutet

$$\Psi(n,m) = (1-\alpha)^{n+1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{\nu}{n} \alpha^{\nu-n}\left|m^{1-p} - \nu^{1-p}\right|. \tag{6.3.2}$$

Diese letzte Form erhält man nach einiger zwischenrechnung—getrennt für $n < m$ und $n \geqq m$—etwa analog zur Umrechnung beim S_β-Verfahren. Wählt man als Teilmenge $\mathfrak{B}_k$ jetzt

$$\nu \in \mathfrak{B}_k \text{ bedeute } \left|(\nu+1) - \frac{n+1}{1-\alpha}\right| > \delta(n+1)^{k} \tag{6.3.3}$$

und koppelt man m und n nach der Vorschrift

$$\frac{(1-\alpha)(m+1)-(n+1)}{(n+1)^p} = Q(n) \text{ mit } \limsup_{n\to\infty} Q(n) = Q \gtreqless 0, \tag{6.4}$$

so erhält man für $1/2 < p < 1$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|c_\nu\right| = o(1) + (1-\alpha)^{p}\frac{1}{(n+1)^{p}}(1-\alpha)^{n+1} \sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu}{n} \alpha^{\nu-n}\left|m-\nu\right| \tag{6.5.1}$$

$$= o(1) + \Phi(n)$$

und für $p \leqq 0$ und $0 < p < 1/2$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|c_\nu\right| \geqq o(1) + \frac{1}{1-p}\Phi(n) \text{ und } \sum_{\nu=1}^{\infty}\left|c_\nu\right| \geqq o(1) + \Phi(n). \tag{6.5.2}$$

Dabei bemützt man zur Abschätzung der Summe über $\nu \in \mathfrak{B}_p$ die Formel

$$(1-\alpha)^{n+1} \sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu}{n} \alpha^{\nu-n}(z-\nu)^2 = \frac{1}{(1-\alpha)^2}\{[z(1-\alpha)+ \ n+\alpha)]^2+(n+1)\alpha\}.$$

Man zerlegt

$$\Phi(n) = Z_1 - Z_2 + Z_3$$

mit

(6.6.1) $Z_1 = (1-\alpha)^p \frac{1}{(n+1)^p} 2 \cdot (m+1) \binom{m}{n+1} \alpha^{m-n}(1-\alpha)^{n+1};$

(6.6.2) $Z_2 = (1-\alpha)^p \frac{1}{(n+1)^p}[(m+1)(1-\alpha)-(n+1)](1-\alpha)^{n+1}$

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu+1}{n+1} \alpha^{\nu-n} ,$$

(6.6.3) $Z_3 = (1-\alpha)^p \frac{1}{(n+1)^p} 2[(m+1)(1-\alpha)-(n+1)](1-\alpha)^{n+1}$

$$\sum_{\nu=n}^{m-1} \binom{\nu+1}{n+1} \alpha^{\nu-n}.$$

Dann ergibt sich wie beim S_β-Verfahren

(6.7.1) $$Z_2 \to (1-\alpha)^p \frac{Q}{1-\alpha} \qquad \text{für } n \to \infty$$

und

(6.7.2) $$Z_1 \to \begin{cases} 0 & \text{für } p > \frac{1}{2}, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} e^{-\frac{1}{2}(Q^2/\alpha)} & \text{für } p = \frac{1}{2}, \\ +\infty & \text{für } p < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Wegen

$$(1-\alpha)^{n+1} \sum_{\nu=0}^{m-n-1} \binom{n+1-\nu}{n+1} \alpha^\nu = o(1) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1-\alpha} \int_{-\infty}^{\eta} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz$$

mit

$$\eta \cong \frac{Q}{\sqrt{\alpha}} n^{p-1/2}$$

bekommt man

$$
(6.7.3) \qquad Z_3 \to \begin{cases} 2(1-\alpha)^p \dfrac{Q}{1-\alpha} & \text{wenn } p > \dfrac{1}{2} \text{ und } Q > 0, \\ 0 & \text{wenn } p > \dfrac{1}{2} \text{ und } Q \leqq 0, \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha}} Q \displaystyle\int_{-\infty}^{Q/\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz & \text{wenn } p = \dfrac{1}{2}, \\ (1-\alpha)^p \dfrac{Q}{1-\alpha} & \text{wenn } p < \dfrac{1}{2} \text{ ist.} \end{cases}
$$

Fasst man zusammen und ersetzt die Koppelungsbedingung (6.4) durch

$$
\limsup_{n\to\infty} \frac{(1-\alpha)m - n}{\alpha^{1-p} n^p} = \frac{Q}{\alpha^{1-p}} = \omega,
$$

so erhält man

$$
\limsup_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu| = D_T^{1-p} \begin{cases} +\infty & \text{für } -\infty < p < \dfrac{1}{2}, \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \left\{ e^{-(\omega^2/2)} + |\omega| \displaystyle\int_0^{|\omega|} e^{-\frac{1}{2}z^2} \, dz \right\} & \text{für } p = \dfrac{1}{2}, \\ |\omega| & \text{für } \dfrac{1}{2} < p < 1, \\ \dfrac{\omega}{|\omega|} \log (1+\omega) & \text{für } p = 1, \\ 0 & \text{für } 1 < p < +\infty. \end{cases}
$$

Dabei verwendet man für $p = 1$ den Wert, den Anjaneyulu [5] erhielt.

Für das Borel-Verfahren hat der Verfasser den behaupteten Satz schon bewiesen [8].

Anjaneyulu [6] and Agnew [3] haben gezeigt, dass für die Kreisverfahren die Tauber-Konstanten für die Bedingung vom Schmidtschen Typ

$$
\limsup_{u\to\infty} \operatorname{Maximum}_{|w-u| \leqq \lambda u^{\frac{1}{2}}} |s_w - s_u| \leqq \lambda L
$$

übereinstimmt mit der Konstanten, die für die Bedingung (1.1) mit $p = 1/2$ gilt. Das vorliegende Ergebnis zeigt also nebenbei die (bekannte) Feststellung, dass jede Tauber-Bedingung der Form (1.1) mit $p < 1/2$ schwächer ist als die Tauber-Bedingung vom Schmidtschen Typ, obwohl diese Bedingung die Tauber-Bedingung

$$\limsup_{n\to\infty} |n^{1/2} a_n| < \infty$$

ihrerseits wieder mitumfasst.

LITERATURVERZEICHNIS

1. R. P. Agnew, *Abel transforms and partial sums of Tauberian series*, Ann. of Math. **50** (1949), 110–117.

2. R. P. Agnew, *Tauberian relations among partial sums, Riesz-transforms and Abel-transforms of series*, J. Reine Angew. Math. **193** (1954), 94–118.

3. R. P. Agnew, *Borel-transforms of Tauberian series*, Math. Z. **67** (1957), 51–62.

4. K. Anjaneyulu, *Tauberian constants for Laurent series continuation matrix transforms*, Ann. Univ. Scient. Budapest, Eötvös Sect, Math. **7** (1964), 157–168.

5. K. Anjaneyulu, *Tauberian constants and Quasi-Hausdorff series to series transformations*, J. Indian Math. Soc. **28** (1964), 69–82.

6. K. Anjaneyulu, *Tauberian constants for $F(c;\mu)$-transforms*, Math. Z. **92** (1966), 194–200.

7. W. Biegert, *Über Konstanten Tauberscher Art bei den Kreisverfahren der Limitierungstheorie*, Dissert. Stuttgart (1965).

8. W. Biegert, *Über Tauber-Konstanten beim Borel-Verfahren*. Math. Z. **92** (1966), 331–339.

9. G. Faulhaber, *Äquivalenzsätze fur die Kreisverfahren der Limitierungstheorie*, Math. Z. **66** (1956), 34–52.

10. A. Jakimovski, *Tauberian constants for Hausdorff-transformations*, Bull. Res. Counc. Israel, Sect. F, **9** (1961), 175–184.

11. A. Meir, *Tauberian constants for a family of transformations*, Ann. of Math. **78** (1963), 594–599.

12. W. Meyer-König, *Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren*, Math. Z. **52** (1949), 257–304.

BRAHMSSTRASSE 2
7053 ROMMELSHAUSEN, GERMANY